Exemples de base

Image, antécédent

1 Trouver les antécédents des complexes i, 0 et $3+4i$ par

a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$ **b)** $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$

Injectivité, surjectivité, bijectivité

2 SF 3 SF 6 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ **b)** $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$

3 SF 2 Montrer que l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ est injective sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

4 SF 5 Montrer que $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective.

5 Dans chacun des cas, prouver que f est bijective et déterminer sa réciproque.

a) $f : t \mapsto (1-t)a + tb$ de $[0,1]$ sur $[a,b]$ $\quad (a < b)$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$

c) $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Image directe, image réciproque

6 SF 9

1. Déterminer l'image de $[-1,2]$ par la fonction $f : x \mapsto x^2$.
2. Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

7 SF 10

1. Déterminer l'image réciproque de $[1,2]$ par la fonction exponentielle.
2. Déterminer l'image réciproque de $[4,+\infty[$ par $f : x \mapsto x^2$.
3. Soit $f : x \mapsto \sin x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([2,3])$.

8 SF 9 On note f l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. On note Δ la droite d'équation $y = x$. Montrer que $f(\Delta) = i\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = i\mathbb{R}^*$.

Relation d'ordre, relation d'équivalence

9 SF 12 Etant donnés $a, b \in \mathbb{N}$, on dit que b divise a s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$. On note alors $b \mid a$.
Montrer que la relation « divise »

a) Est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

b) N'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

10 SF 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

Grands classiques

11 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Démonstrations

12 Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E.
Montrer que : $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

13 Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications.
Montrer que : $\quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

14 Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective.

15 Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que : $\quad g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad$ et $\quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
Montrer que f est bijective et que $g = f^{-1}$.

16 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives.
Montrer que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

17 Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur un ensemble E et $A \in \mathscr{P}(E)$.
Montrer que si A possède un plus grand élément pour $\lhd$, alors il est unique.

18 Montrer que les classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$ forment une *partition* de E *i.e.* :

a) Aucune n'est vide

b) Leur réunion est E.

c) Deux classes distinctes sont disjointes.