Modèles de résolution

Equations du premier ordre

1 SF 1 **1.** Résoudre : $y' + \frac{1}{t} y = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre : $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre : $y' + \frac{1}{t} y = t + \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Equations du second ordre

2 SF 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $y'' + 4y' - 5y = 0$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

d) $y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \in \mathbb{R}^*)$

3 SF 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $y'' - y' - 2y = e^t$.

b) $y'' - y' - 2y = 2\operatorname{ch} t$.

4 SF 4 Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y' - 2y = 10\cos t$

5 SF 4 Soient $\omega, \rho \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre : $y'' + \omega^2 y = \sin(\rho t)$.

Grands classiques

6 SF 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tous $x, t \in \mathbb{R}$: $f(x+t) = f(x)f(t)$.

7 SF 5 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = f(\pi - x)$.

Démonstrations

8 Soit I un intervalle, $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et A une primitive de a sur I. Montrer que les solutions de : $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$ où $C \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

9 Soit I un intervalle, a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ et y_1 une solution particulière de $(E) : \quad y' + ay = b(t)$. Montrer que les solutions de (E) où y_0 est une solution quelconque de $y' + ay = 0$.

10 Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que la fonction $y : t \mapsto e^{\lambda t}$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ si et seulement si λ vérifie l'équation caractéristique : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

11 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On cherche à résoudre $(E_0) : \; y'' + ay' + by = 0$. On note λ_1, λ_2 les racines complexes l'équation caractéristique : $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

1. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $z : t \mapsto y(t)e^{-\lambda_1 t}$ est solution de $z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$.

2. En déduire que :

a) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : t \mapsto Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ où $A, B \in \mathbb{C}$.

b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, alors les solutions de (E_0) sont les fonctions $y : t \mapsto (A + Bt)e^{\lambda_0 t}$ où $A, B \in \mathbb{C}$