Exemples de base

Méthodes directes

1 SF 3 Déterminer une primitive de :

a) $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ **b)** $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ **c)** $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^6}$

d) $x \mapsto \dfrac{x^5}{1+x^6}$ **e)** $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ **f)** $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

2 SF 4

1. Calculer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$
2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^2 x \cos x$ de deux façons différentes.

3 SF 5 Déterminer une primitive des fonctions :

a) $f : x \mapsto e^x \cos(2x)$. **b)** $g : x \mapsto e^{-3x}\sin(2x)$

4 SF 6 Trouver une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2x^2+5x-3}$$

5 SF 7 Trouver une primitive sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2+4x+1}$.

6 SF 8 Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Intégration par parties

7 SF 9 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t$.

8 SF 9

1. Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Déterminer les primitives de Arctan sur $\mathbb{R}$

Changement de variable

9 SF 10 Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^e \frac{1}{t+t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

en effectuant le changement de variable $x = \ln t$.

10 SF 11 Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

en effectuant le changement de variable $x = \sin t$.

11 SF 10 SF 11 Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ (poser $x = e^t$)
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = \dfrac{1}{s}$)

12 SF 11 Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \cos(2\ln t)$ à l'aide du changement de variable $t = e^u$.

13 SF 10 Calculer une primitive sur $]0,\pi[$ de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin\theta}$

a) à l'aide du changement de variable $t = \cos\theta$.
b) à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Démonstrations

14 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction. On suppose que f admet une primitive F_0 sur I. Montrer que les primitives de f sont les fonctions de la forme $F_0 + k$, où $k \in \mathbb{K}$ est une constante quelconque.

15 Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et F une primitive de f.
A l'aide du théorème fondamental de l'analyse montrer que pour tous $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

16 Enoncer et démontrer la formule d'intégration par parties

17 Enoncer et démontrer la formule de changement de variable