Exemples de base

1 *SF 1* Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^x$.

2 *SF 2* Résoudre l'équation $\operatorname{sh} x = \sqrt{3}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3 *SF 3* On note f la fonction $f : x \mapsto xe^x$

1. Montrer que f est bijective de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
2. On note W la réciproque de la fonction f. Montrer que W est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]-e^{-1}, +\infty[, \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}$$

4 Montrer que $f : x \mapsto 10^x$ est une bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de f^{-1}.

5 Calculer :

a) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arcsin} 1$, $\operatorname{Arcsin} 0$, $\operatorname{Arcsin} \frac{-\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{2\pi}{3}$ et $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{20\pi}{3}$

6 Calculer :

a) $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arccos} 1$, $\operatorname{Arccos} 0$, $\operatorname{Arccos} \frac{-1}{2}$

b) $\operatorname{Arccos} \cos -\frac{\pi}{3}$ et $\operatorname{Arccos} \cos \frac{20\pi}{3}$.

c) $\operatorname{Arccos} \cos \theta$ pour tout $\theta \in [\pi, 2\pi]$.

7 *SF 7* Résoudre l'équation : $\operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arcsin} x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

8 Calculer : $\operatorname{Arctan} 1$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{3}$, $\operatorname{Arctan} 0$, $\operatorname{Arctan} \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

9 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

1. On suppose $x > 0$. Etablir : $z = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{i \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}}$
2. On suppose $x < 0$. . Etablir : $z = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{i(\pi + \operatorname{Arctan} \frac{y}{x})}$

Grands classiques

10 *SF 5* Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

11 *SF 7* Résoudre l'équation : $\operatorname{Arctan} 2x + \operatorname{Arctan} 3x = \frac{\pi}{4}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstrations

12 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note p_α la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

1. Justifier la dérivabilité de p_α sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Soit $\alpha > 0$. On prolonge p_α en 0 en posant $0^\alpha = 0$. Montrer que la fonction p_α ainsi prolongée est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha \geq 1$.

13 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la limite $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$, montrer que $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

14 Montrer que pour tout réel x : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

15 Etudier (parité, dérivabilité, dérivée, limites et variations) la fonction th

16

1. Rappeler l'expression de la dérivée de Arcsin sur $]-1, 1[$.
2. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que : $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2}$
3. Démontrer la formule de la question 1.

17

1. Prouver l'imparité de Arctan
2. Justifier la dérivabilité de Arctan sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

18 *SF 5* Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$