Exemples de base

Conjugué, module

1 **SF 1** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{\overline{z}-iz}{i-1}$ est réel.

2 **SF 2** Mettre sous forme algébrique le complexe : $\dfrac{3+6i}{3-4i}$.

3 Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que : $|z-1| = |z|$.

4 **SF 4** Trouver tous les $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z-1|$.

Applications à la trigonométrie

5 **SF 6** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser : **a)** $\sin^5 x$. **b)** $\cos^4 x \sin x$

6 **SF 7** Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire $\cos 4x$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Forme trigonométrique

7 Mettre sous forme trigonométrique les complexes :

a) $z_1 = 1+i$ **b)** $z_2 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2+2i}$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Déterminer tous les entiers $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels ω^p est réel.

9 **SF 9** Donner la forme algébrique de $(1+i)^{10}$.

10 **SF 10** Résoudre les équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

a) $\exp(z) = \sqrt{3}+i$ **b)** $\exp(iz\pi) = 1-i$

Racines énièmes

11 **SF 12** Simplifier le complexe $Z = \frac{1+\overline{j}}{1+j}$

12 **SF 13** Déterminer les racines cubiques de $Z = 2+2i$

Second degré dans $\mathbb{C}$

13 **SF 14** Calculer les racines carrées de $3-4i$.

14 Résoudre l'équation : $z^2-(3+i)z+2+i = 0$.

15 **SF 16** Résoudre le système : $\begin{cases} z_1+z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$ d'inconnue $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Applications à la géométrie

16 **SF 18** Trouver les $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1,-1\}$ tels que z , z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en z.

17 **SF 17** Caractériser géométriquement la similitude

$$f : z \mapsto 2iz+2+i$$

Grands classiques

18 **SF 8** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$$

19 Soient $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité ssi $z_1,\dots,z_n$ ont même argument.

20 **SF 11** Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$.
2. Montrer que les solutions sont réelles et les exprimer simplement à l'aide des fonctions cosinus et sinus.

21 Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b,c \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $az^2+bz+c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en mettant le trinôme az^2+bz+c sous forme canonique.

Démonstrations

22
1. Démontrer les inégalités triangulaires.
2. Montrer qu'il y égalité ssi z et z' sont colinéaires de même sens *i.e.* ssi $z' = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = kz'$.

23 Soit $\theta,\theta' \in \mathbb{R}$. Etablir : $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

24 Démontrer la formule de Moivre et les formules d'Euler.

25 **SF 5** Démontrer les deux formules de transformation de $1 \pm e^{i\theta}$ en « factorisant par l'angle moitié ».

26 **SF 5** Soient $p,q \in \mathbb{R}$. En factorisant $e^{ip}+e^{iq}$ par l'angle moitié, retrouver la formule de factorisation de $\cos p + \cos q$.

27 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

1. Démontrer le théorème donnant la liste des racines de l'unité. Placer ces racines sur le cercle trigonométrique dans le cas où $n = 3$ et dans le cas où $n = 4$.
2. Combien vaut la somme des racines n-ièmes de l'unité ? Démontrer ce résultat.

28 Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer le théorème donnant la liste des racines n-ièmes de Z en commençant par vérifier que $z_0 = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient.

29 Soient $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{C}$. On note P la fonction polynomiale $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P.

a) Montrer qu'il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$

b) On suppose que les a_k sont tous réels. Montrer que $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

30 Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az+b$ une similitude directe. Montrer que :

a) f possède un unique point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ vérifie $z'-\omega = a(z-\omega)$