Exemples de base

Arithmétique des polynômes

1 On pose $A = 6X^4+8X^3-7X^2-5X-2$ et $B = 6X^3-4X^2-X-1$.
1. Calculer $A \wedge B$
2. Trouver une relation de Bézout entre A et B.

2 On pose $A = 2X(X+1)^2(X+2)^3$ et $B = X^2(X+2)(X^2+X+1)$. Calculer $A \wedge B$.

Factorisations

3 SF 6 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes :

a) $P = X^4+1$. b) $Q = 1+X+\cdots+X^{n-1}$ (où $n \geq 2$).

4 On pose $P = X^8+2X^6+3X^4+2X^2+1$
a) Montrer que j est racine de P.
b) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

5 SF 7 Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$:

a) $P = X^4+1$ b) $P = X^5-1$ c) $P = X^{2n+1}-1$

6 Factoriser $P = X^5-4X^2+3X$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que 1 est racine double.

Décompositions en éléments simples

7 SF 12 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

a) la fraction $\dfrac{1}{X^2-1}$ b) la fraction $\dfrac{X^3+2}{X^2-X}$

8 SF 12 Calculer les décompositions en éléments simples suivantes dans $\mathbb{R}(X)$ de :

a) $\dfrac{X+3}{(X+1)^2(X+2)}$ b) $\dfrac{X^3}{(X-1)^2(X-2)^2}$

c) $\dfrac{25}{(X-1)^2(X^2+4)}$ d) $\dfrac{3(X-2)^2}{X(X-1)^2(X^2+X+1)}$

e) $\dfrac{X^2}{(X^2-1)^2}$

9 SF 14 Déterminer une primitive de :

a) $x \mapsto \dfrac{3+4x}{x^2+4}$ b) $x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2+2x+5}$

10 SF 14 Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4t^5}{t^4-1}\,\mathrm{d}t$

Grands classiques

11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X^n-1}$.

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $\dfrac{2n}{X^{2n}-1}$.

13 SF 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.

14 SF 14 Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t}{(t^2+t+1)(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$

Démonstrations

15
1. Montrer que tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2 à discriminant strictement négatif est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
4. Montrer que les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

16 Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, non tous deux nuls. Montrer que P et Q sont premiers entre eux ssi ils n'ont aucune racine commune dans $\mathbb{C}$.

17 Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une de $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité.

18 Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que a ne peut être à la fois zéro et pôle de F.

19 Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, avec $P \wedge Q = 1$, admettant a pour pôle simple : $F = \dfrac{\alpha}{X-a} + G$ où a n'est pas pôle de G.

Montrer que : $\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$

20 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ les racines de P et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ leurs ordres. Montrer que :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{X-a_i}$$