Exemples de base

1 Ecrire explicitement la matrice $A = (ij^2)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

2 Calculer AB :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 *SF 1* On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^p pour tout $p \geq 1$.

4 *SF 1* Calculer l'expression de A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5 *SF 1* Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et trouver $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$.
2. En déduire une expression de A^n en exploitant la division euclidienne de X^n par P.

6 *SF 2* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que A vérifie $A^2 - 3A - 2I_n = 0$.
Prouver que A est inversible et déterminer son inverse.

7 A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Grands classiques

8 Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

9 Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

a) Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$

10 *SF 3* On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Calculer explicitement u_n, v_n et w_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstrations

11 Démontrer la propriété d'associativité du produit matriciel.

12 Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A^\top$ est inversible et que $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

13 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si l'une des colonnes de A est combinaison linéaire des autres alors A n'est pas inversible.

14 Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et que dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

15 Montrer que les matrices d'opérations élémentaires sont inversibles.

16 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose avoir transformé A en I_n après k opérations élémentaires. Montrer que A est inversible et donner une expression de A^{-1}.

17 Montrer qu'une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.