## Exemples de base

**1** Soit $n \in \mathbb{N}$. A partir de l'égalité $(X+1)^{2n} = (X+1)^n(X+1)^n$, démontrer l'*identité de Vandermonde* : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

**2** Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

**3** *SF 1* Trouver tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^3) = X^2 P(X)$.

**4** *SF 2* Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par : **a)** $X^2 - 3X + 2$ **b)** $X^2 - 4X + 4$

**5** *SF 3* Montrer que $P = (X-2)^8 + (X-1)^7 - 1$ est divisible par $Q = X^2 - 3X + 2$.

**6** *SF 3* Montrer que $1 + X + X^2$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

**7** *SF 8* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $P\left(e^x\right) = e^{2x} + e^x + 1$. Calculer $P(-1)$ et $P(j)$

**8** *SF 8* Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $P(x) = \sin x$.

**9** *SF 8* Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

**a)** $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + 1$ **b)** $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + (-1)^n$

**10** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^n - 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

**11** Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = X^5 + aX^2 + bX$ soit divisible par $(X-1)^2$.

**12** Montrer que $(X^2+1)^2$ divise $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

**13** *SF 6* Soit $n \geq 2$.

**a)** Montrer que $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

**b)** En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$

**14** *SF 5* Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+xz=-2 \\ xyz=-1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

**15** Soit $n \geq 2$. En considérant le polynôme $P = X^n - 1$, retrouver la formule donnant la somme des racines $n$-ièmes de l'unité et trouver une formule pour le produit.

**16** *SF 8* Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p L_i$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$

## Grands classiques

**17** *SF 8* Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que $P$ est constant.

**18** Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et que ce polynôme est donné par : $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ (où $L_1, \ldots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$).

**19** Démontrer la formule de Taylor polynomiale

**20** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre :

*i)* $a$ est racine de $P$ de multiplicité $m$

*ii)* $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

## Démonstrations

**21** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, non nuls. Montrer que :

1. $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
2. $\deg PQ = \deg P + \deg Q$

**22** Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre

**23** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Etablir :

$$A \mid B \ \text{ et } \ B \mid A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid A = \lambda B$$

**24** Etablir l'unicité puis l'existence du couple quotient-reste de la division euclidienne.

**25** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $P(a) = 0$ si et seulement si $(X-a)$ divise $P$

**26** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts ($k \in \mathbb{N}^*$). Montrer que si $P(a_1) = \cdots = P(a_k) = 0$ alors $P$ est divisible par $(X-a_1)\ldots(X-a_k)$.

**27** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul. On pose $n = \deg P$. Montrer que $P$ a au plus $n$ racines dans $\mathbb{K}$.

**28** Démontrer la formule de Taylor polynomiale

**29** Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre :

*i)* $a$ est racine de $P$ de multiplicité $m$

*ii)* $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.