Exemples de base

Lois de composition internes

1 Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\star$ et possédant un élément neutre e. Soit $a \in E$, inversible. Montrer que les applications $\gamma_a : x \mapsto a \star x$ et $\delta_a : x \mapsto x \star a$ sont des permutations de E.

Groupes

2 Vrai ou faux ?

a) $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

b) $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

3 *SF 1*

a) Montrer que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous groupe de $\mathbb{U}$.

Morphismes de groupes

4 L'application $f : z \mapsto e^z$ est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

5 Montrer que l'application $\varphi : g \mapsto \gamma_g$ est un morphisme de groupe injectif de G dans $S(G)$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les morphismes de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ sont les applications $z \mapsto z^p$ pour $p \in [\![0, n-1]\!]$
2. Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $f : z \mapsto z^p$ est un isomorphisme si et seulement si $p \wedge n = 1$.

Anneaux

7 Trouver tous les morphismes de corps f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ tels que : $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8 Montrer que l'anneau $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre.

Grands classiques

9 Soient $(G, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre e et $(G', \star)$ est un groupe d'élément neutre e'. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe. Montrer que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Démonstrations

10 Soit $(E, \star)$ et $(F, \cdot)$ deux ensembles munis de lois de composition interne. On définit une loi de composition interne $\times$ sur (E, F) en posant, pour tous $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$:

$$(x, y) \times (x', y') = (x \star x', y \cdot y')$$

Montrer que si $\star$ et $\cdot$ sont associatives, alors la loi produit $\times$ l'est aussi.

11 Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$. Montrer que s'il existe un élément neutre pour $\star$, alors il est unique.

12 Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative $\star$ et possédant un élément neutre e. Soient $x, y \in E$, inversibles et $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que x^{-1} est inversible et que $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
2. Montrer que $x \star y$ est inversible et que $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

13 Montrer que si $(G, \star)$ et $(G', \cdot)$ sont des groupes, alors $G \times G'$ est un groupe pour la loi produit.

14 Soient $(G, \star)$ un groupe et H un sous-groupe de G.

1. On note e l'élément neutre de G. Montrer que $e \in H$.
2. Montrer que $(H, \star)$ est un groupe.

15 Soient $(G, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre e et $(G', \star)$ est un groupe d'élément neutre e'. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

a) Montrer que $f(e) = e'$

b) Montrer que pour tout $x \in G$: $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

16 Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \star)$ des groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupe.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G.

b) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G'.

17 Soit $(A, +, \times)$ un anneau $a, b \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

a) $a \times 0_A = 0_A$

b) $(-a) \times b = -(a \times b)$

c) $(na) \times b = n(a \times b)$