Exemples de base

1 Etudier la dérivabilité en 0 de :

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **b)** $g : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2 Montrer que la fonction $f : x \mapsto |\text{Arctan}\, x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3 *SF 1* Justifier la dérivabilité de
a) $f : x \mapsto \sqrt{(x-1)\ln x}$ sur $[1,+\infty[$
b) $f : x \mapsto \text{Arcsin}(1-x^2)$ sur $[0,\sqrt{2}[$

4 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression des dérivées k-ième de

a) $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) **b)** sh et ch
c) sin et cos **d)** $f : x \mapsto x^p$ (où $p \in \mathbb{N}$)

5 *SF 2* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée k-ième de la fonction $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

6 *SF 3* *SF 4* **1.** Justifier que $f : x \mapsto xe^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1,+\infty[$
2. Justifier que f est une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $[-\frac{1}{e},+\infty[$ et que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{e},+\infty[$

7 *SF 7* Soit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que : $4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \alpha+\beta+\gamma$.

8 *SF 6* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable, telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Montrer que f''' s'annule

9 *SF 8* Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \le \ln(k+1) - \ln(k) \le \dfrac{1}{k}$
b) En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

10 Justifier la stricte monotonie sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

a) $f : x \mapsto \text{th}\, x - x$ **b)** $g : x \mapsto x + \cos x$

Grands classiques

11 *SF 2*
1. Démontrer la formule de Leibniz.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ l'expression de $f^{(n)}(x)$.

12 *SF 5* On note f la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
1. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que le prolongement par continuité de f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

13 Enoncer et démontrer le théorème de Rolle.

14 Démontrer l'égalité des accroissements finis.

15
1. Démontrer le théorème de la limite de la dérivée.
2. Prouver que l'implication :
$(f$ est dérivable en $a) \Longrightarrow (f'$ admet une limite finie en $a)$
est fausse. *On pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et $f(0) = 0$.*

16 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. On suppose que f s'annule en au moins $n+1$ points distincts. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

17 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Montrer que f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I.

Démonstrations

Cadre. I est un intervalle non vide et non réduit à un point, a est un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

18 Montrer que f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$$
où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie : $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

19 Montrer que si f est dérivable en a alors elle y est continue.

20 On suppose que f est convexe et que a est un point intérieur à I. Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en a.

21 On suppose que a est un point intérieur à I et que f est dérivable en a.
1. Montrer que si f possède un extremum local en a alors : $f'(a) = 0$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

22 Soient u,v deux fonction dérivables en a. *Démontrer* que uv est dérivable en a et que : $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

23 Soient $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$. On suppose u à valeurs dans J. Montrer que si u est dérivable en a et si v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a et :
$$(v\circ u)'(a) = u'(a) \times v'\big(u(a)\big)$$

24 On suppose que f est continue sur I et strictement monotone. On pose $b = f(a)$ et on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$. Montrer que f^{-1} est dérivable en b et que
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

25 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'(x)| \le k$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur I.

26 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. Démontrer que f est croissante sur I ssi $f' \ge 0$ sur I.

27 Démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.