Exemples de base

1 SF 4 Etudier dans chaque cas la continuité de f en 0.

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b) $f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2 SF 4 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier la continuité à gauche et à droite en n de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

3 SF 5 Montrer dans chaque cas que f est prolongeable par continuité en 0 : **a)** $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ **b)** $f : x \mapsto x \ln x$.

4 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $f(r) = g(r)$. Montrer que $f = g$.

5 SF 3 Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

6 SF 2 Etudier la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^x + \sin(x \ln x)$.

7 SF 6

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)$ est continue sur $[0, 1[$.
2. Que peut-on dire en 1 ?

8 SF 6 Justifier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $g : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

9 Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I.

10 SF 10 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle.

11 SF 12 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x(\ln x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée sur $]0, 1]$.

12 SF 12 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée.

b) Montrer avec un contre-exemple que f n'atteint pas nécessairement ses bornes.

13 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement croissante, telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to \ell]{} +\infty$.

Grands classiques

14 SF 8

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par $u_0 = x_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}\, u_n$. Montrer que u converge et trouver sa limite.
2. Trouver toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

15 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

16 SF 4 SF 2 On suppose f convexe sur $]a, b[$. Soit $c \in]a, b[$. Montrer que f est continue en c.

17 SF 10 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe c'est à dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

18 SF 13

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n \ln x = 1$ a une unique solution dans $[1, +\infty[$, notée x_n
2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Démonstrations

19 Définir avec des quantificateurs :

a) f admet $+\infty$ pour limite en a

b) f admet ℓ pour limite en $-\infty$

c) f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$

20 Soit I un intervalle et $a \in \mathbb{R}$ un point de I ou l'une de ses extrémités. Soit f une fonction réelle définie sur I ou $I \setminus \{a\}$.

1. Montrer que si f admet en a une limite alors cette limite est unique.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors f est bornée au voisinage de a.
3. Montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.
4. Montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et si g est bornée au voisinage de a, alors : $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

21 Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue en a.

ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$: $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$

22 Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

23 *TVI strictement monotone.* Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b[$. On pose $\alpha = f(a)$ et on suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est bijective de $[a, b[$ sur $[\alpha, \ell[$.

24 *Théorème des bornes atteintes.* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'elle possède un maximum sur $[a, b]$.

25 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur I. Montrer que f est strictement monotone.