Exemples de base

1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a-b$ divise $a^n - b^n$.

2 SF 1 Montrer que $4^{345} + 9^{434}$ est divisible par 5.

3 SF 2 SF 3 Trouver le reste de la division euclidienne de 2^{65362} par 7 .

4 SF 2 SF 3 $4^{345} + 9^{434}$ est-il divisible par 7 ?

5 Soit $n \in \mathbb{Z}$, impair. Montrer : $n^2 \equiv 1\ [8]$.

6 Montrer que l'équation $x^2 - 3y^2 = 17$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

7 SF 6 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer : $(7n-5) \wedge (3n+2) = (n-9) \wedge 29$.

8 SF 5 On pose $a = 1659$ et $b = 504$.
1. Calculer $a \wedge b$
2. Déterminer une relation de Bézout entre a et b.

9 SF 8 Résoudre le système $\begin{cases} x \wedge y = 10 \\ x \vee y = 120 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

10 SF 8 Résoudre l'équation $x \wedge y = x^2 - y^2 - 2$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

11 SF 10 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que a divise b si et seulement si a^2 divise b^2.

Grands classiques

12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $M_n = 2^n - 1$.
Montrer que si M_n est premier, alors n est premier.

13 SF 7 1. Démontrer le lemme de Gauss.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 12y = 3$.

14 Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer que si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors : $a \wedge bc = 1$.
2. Montrer que si $a \mid c$, $b \mid c$ et $a \wedge b = 1$, alors : $ab \mid c$.

15 Soit $p \in \mathbb{P}$.
1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^p \equiv n\ [p]$.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$ non divisible par p, montrer que $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$

Démonstrations

16 Montrer que si : $a \mid b$ et $b \mid a$, alors : $a = \pm b$

17 Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b

18 Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'\ [n]$ alors : **a)** $a + a' \equiv b + b'\ [n]$ **b)** $aa' \equiv bb'\ [n]$

19 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple (q, r) d'entiers tels que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$

20 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $a \wedge b = b \wedge a - kb$

21 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On pose : $r_{-1} = a$ et $r_0 = b$. Pour $k \in \mathbb{N}$, *tant que* $r_k \neq 0$, on définit r_{k+1} comme le reste de la division euclidienne de r_{k-1} par r_k.
1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n > 0$ et $r_{n+1} = 0$.
2. Montrer que $r_n = a \wedge b$.
3. Par récurrence double sur k, montrer que pour tout $k \in [\![-1, n]\!]$, il existe $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$ tels que $r_k = au_k + bv_k$

22 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{Z}$:
$$(d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b) \iff d \mid a \wedge b$$

23 Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$

24 Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
$$(a \mid m \quad \text{et} \quad b \mid m) \iff a \vee b \mid m$$

25 Enoncer et démontrer le théorème de Bézout

26 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{P}$. On suppose que $p \mid ab$. Montrer que $p \mid a$ ou $p \mid b$.

27 Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ possède au moins un diviseur premier.

28 Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini.

29 Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Montrer que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$

30 Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_n$ les diviseurs premiers de a. On suppose que : $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ pour certains $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.
Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\alpha_i = v_{p_i}(a)$.