Exemples de base

Propriétés liées à l'ordre

1 Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{3-\cos n}$ est bornée.

2 SF 3 Soit $q \in]0,1[$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(1+q^k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que u est majorée.

3 SF 4 Etudier la monotonie des suites de termes généraux :

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **b)** $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k^2}\right)$

c) $w_n = \dfrac{e^n}{n!}$ **d)** $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{np} \frac{1}{k}$ (où $p \geq 2$)

Suites particulières

4 SF 1 Déterminer le terme général de la suite u définie par :

a) $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}u_n$.

b) $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

5 SF 2 On suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6 SF 2 On suppose que $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer deux constantes r et θ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = r^{n+3}\cos\big((n+1)\theta\big)$

7 SF 2 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$. Montrer que u est périodique

Opération sur les limites

8 SF 5 Etudier la limite de $\left(\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$

Limites par encadrement

9 SF 7 Etudier la limite de la suite de terme général :

a) $u_n = \dfrac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}$ $(x \in \mathbb{R})$ **b)** $u_n = q^n$ où $q > 1$

10 SF 3 Etudier la convergence et la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$.

Limites des suites monotones

11 SF 6 On pose $u_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

12 SF 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$. Montrer que u et v convergent vers une même limite.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

13 SF 11 Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = e^{u_n} - 2$

14 SF 11 **1.** Soit $u_0 > 0$. Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n + 3}{6}$

2. Même question lorsque $u_0 < 0$.

15 Etudier la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$

Suites divergentes

16 *Contrexemples.* Donner un exemple de suite :

1. Bornée mais divergente.

2. Non bornée et qui n'a pas une limite infinie.

17 SF 9 Montrer que la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2n}\right)$ n'a pas de limite.

Borne supérieure et suites

18 Déterminer les bornes supérieure et inférieure de

$$A = \left\{\frac{q}{2^p + q}\,;\ p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$$

19 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a_n = \inf\{u_k\,;\ k \geq n\}$. Montrer que (a_n) est croissante.

Grands classiques

20 On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

21 *La suite harmonique diverge...* On pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour tout $n \geq 1$.

1. a) Etudier la monotonie de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$

c) En déduire : $H_n \to +\infty$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que u et v sont adjacentes.

22 *... la suite harmonique alternée converge* Pour tout $n \geq 1$ on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$,

a) Prouver que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) Etudier la nature de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstrations

Suites récurrentes linéaires

23 Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1$ et soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $v = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

24 Soit $a \in \mathbb{K}$ et $b, \lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. Montrer que la suite géométrique $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
si et seulement si λ est solution de l'équation caractéristique : $\quad (\mathscr{C})$: $\quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0$.
2. On suppose que le discriminant de l'équation caractéristique $(\mathscr{C})$ est nul et on note λ_0 la solution double de $(\mathscr{C})$. Montrer que la suite $u = (n\lambda_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

25 On pose $E = \left\{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$. Montrer que l'application $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est bijective.

Suites monotones

26 Soient u et v deux suites adjacentes. Montrer qu'elles convergent vers une même limite.

27 Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une fonction (I est ainsi stable par f). Soit u une suite pour laquelle $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose f croissante sur I. Montrer que u est monotone.
2. On suppose f décroissante sur I. Montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraire.

Utilisation de la définition de la limite

28
1. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ (où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$) alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
2. Démontrer le théorème d'encadrement.

29 Démontrer l'unicité de la limite en raisonnant par l'absurde.

30
1. Montrer que toute suite convergente est bornée.
2. Démontrer que si u est bornée et si v converge vers 0, alors uv converge vers 0.
3. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ (où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$) alors : $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

31
1. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u converge vers $\ell > 0$. A revenant à la définition de la limite montrer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
2. En déduire une démonstration du théorème de passage aux limites dans les inégalités larges.

32
1. Démontrer le théorème de minoration.
2. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors : $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

33 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. *Démontrer* que u converge.

Suites complexes

34 Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas d'une suite complexe (en utilisant le théorème dans le cas réel).

Plus grand/plus petit élément

35
1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $a \wedge b$ et $a \vee b$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. Justifier l'existence de $v_p(a)$.

Borne supérieure

36 Soit I un intervalle non vide. Pour toute fonction bornée $f : I \to \mathbb{R}$, on pose : $\quad \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, bornées et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

a) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ **b)** $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$

37 Soit A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Démontrer l'équivalence entre :

i) $M = \sup A$

ii) Il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Approximations d'un réel

38 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $z_n = y_n + \dfrac{1}{10^n}$. Montrer que les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

39
1. Montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
2. En déduire que tout intervalle ouvert non vide possède un rationnel.
3. Montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de nombre irrationnels.

40 Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On suppose que tout intervalle ouvert non vide possède un élément de A. Montrer que tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.