Exemples de base

Etude de fonctions

1 Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\ln|x|}$.

2 Soient $T, \omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Déterminer une période de la fonction $g : t \mapsto f(\omega t)$

3 Soient T et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver $y \in [0, T[$ tel que : $f(y) = f(x)$.

4 SF 5

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$
2. Trouver un ensemble sur lequel f est dérivable

5 Montrer que la fonction $f : x \mapsto 2x + \cos(2x)$ est strictement croissante sur $[0, 2\pi]$.

Fonctions convexes

6 SF 8 SF 2 Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $e^{a+b} \leq \frac{e^{2a}+e^{2b}}{2}$.

7 SF 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Fonctions trigonométriques

8 SF 11 Résoudre l'équation $\cos x = \sin x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

9 SF 10 Trouver A et φ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2}\cos t + \sqrt{6}\sin t = A\cos(t-\varphi)$$

10 SF 10 Résoudre l'équation : $\cos x + \sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Grands classiques

11 SF 12 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(y) = (x-y) f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$

12 SF 2 *Inégalité arithmético-géométrique*

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Etablir : $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

13 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1}\cos\theta - u_n$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \cos(n\theta)$.

Démonstrations

14 Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ?

15 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

i) f est convexe sur I

ii) Pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

16 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi).$$

17 **a)** Justifier la dérivabilité de tan sur son ensemble de définition et établir les deux formules donnant l'expression de sa dérivée.

b) Démontrer la formule donnant $\tan(a+b)$