Techniques et raisonnements de base

1 SF 1 Montrer que pour tout $x \in [0,2]$: $\frac{1}{7} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq 1$

2 SF 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-2}{x+2}$

3 SF 3 Résoudre l'inéquation : $|2-x|+|2x+4| \leq 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4 SF 4 Résoudre l'inéquation $2x \leq \sqrt{x^2+1}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5 Montrer que pour tout $x>0$:

a) $\ln(x+1)-\ln x \geq 0$ **b)** $(x+1)\ln(x+1)-x\ln x \geq 0$.

6 SF 7 Montrer que pour tout $x \in [0,2]$: $\frac{1}{3} \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2}$.

7 SF 7 Montrer que $\frac{x+1}{x-1}\ln x \geq 2$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

8 Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles :

a) $A=(p+1)\times(p+2)\times\cdots\times(p+n)$. **b)** $B=2\times4\times\cdots\times 2p$.
c) $C=1\times3\times\cdots\times(2p+1)$.

9 SF 10 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1=1$, $u_2=2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq n$.

10 SF 10 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=u_1=1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2}=u_{n+1}+\frac{u_n}{n+1}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq u_n \leq n^2$.

11 SF 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $u_0=1$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 2^n$.

Grands classiques

12 SF 7 Etablir :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^x \geq 1+x$ **b)** $\forall x>-1,\quad \ln(1+x) \leq x$

c) $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}],\quad \sin x \geq \frac{2x}{\pi}$

13 SF 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin x|.$$

Démonstrations

14 SF 5 Etablir, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$:

a) $|x-y| \leq |x|+|y|$ **b)** $|x-y| \geq |x|-|y|$ **c)** $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

15 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

16 Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et f,g deux fonctions croissantes de D dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $f+g$ est croissante.

17 Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que f est majorée et minorée si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in D$: $|f(x)| \leq M$.

18 Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que f' est croissante sur I. Montrer que pour tous $a,x \in I$: $f(x) \geq f(a)+f'(a)(x-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.